Puissances d'un endomorphisme géométrique

Dans tout le problème, $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne orientée usuelle et rapporté à sa base canonique (orthonormée directe) notée (e_1, e_2, e_3).

On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ la $\mathbb{R}$ algèbre des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la $\mathbb{R}$ -algèbre des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels et I_3 la matrice identité.

Partie I

Soit s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Calculer $\det s$. En déduire que s est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $e_1' = (1,1,1)$, $e_2' = (1,-1,0)$ et $e_3' = (1,1,-2)$.

2.a Montrer que $\left(e_1', e_2', e_3'\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2.b Déterminer la matrice S' de s dans la base $\left(e_1', e_2', e_3'\right)$.

2.c Calculer S'^n et donner une méthode de calcul de S^n.
(on ne demande pas d'effectuer lesdits calculs).

3.a La famille (I_3, S) est-elle libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

3.b Montrer que S^2 peut s'exprimer comme combinaison linéaire de I_3 et S.

3.c En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple (a_n, b_n) de réels tels que $S^n = a_n I_3 + b_n S$.

3.d Donner les valeurs de a_0, b_0, a_1, b_1 et exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

3.e Montrer que la suite $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, puis que la suite $(b_n + 1)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

3.f En déduire l'expression de a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Soit $B = S - 2I_3$.

4.a Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$.

4.b En déduire l'expression de S^n en fonction de I_3 et B pour $n \in \mathbb{N}$.

4.c Comparer avec le résultat de la question 3.

Partie II

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

On pose $u = f \circ s^{-1}$ et on note U la matrice de u dans la base canonique.

1. Calculer U ; vérifier que u est une rotation vectorielle et que $u \circ s = s \circ u = f$.
2. Soit $\left(e_1'', e_2'', e_3''\right)$ la famille obtenue en normant les vecteurs e_1', e_2' et e_3' de la question I.2.

2.a Montrer que $\left(e_1'', e_2'', e_3''\right)$ est base orthonormée directe.

2.b Ecrire la matrice U' de u dans cette base et caractériser géométriquement u.

3.a Exprimer la matrice de s dans la base (e_1'', e_2'', e_3'') en fonction de S'.

3.b En déduire la matrice de f dans la base (e_1'', e_2'', e_3'').

4.a Quel est l'ensemble des vecteurs invariants par f ?

4.b Soit $P = \text{Vect}(e_2'', e_3'')$.

4.b.i Montrer que $f(P) = P$.

4.b.ii Soit g l'endomorphisme de P tel que pour tout x de P, $g(x) = f(x)$. Montrer que g est la composée de deux applications linéaires simples que l'on reconnaîtra.

5. On note $\mathcal{C}(f)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ commutant avec f, c'est à dire l'ensemble des endomorphismes g tels que $g \circ f = f \circ g$.

5.a Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

5.b Soit $g \in \mathcal{C}(f)$.

5.b.i Montrer que le vecteur $g(e_1'')$ est invariant par f. Que peut-on en déduire ?

5.b.ii Soit M la matrice de g dans la base (e_1'', e_2'', e_3''). Montrer que M commute avec $(S')^3$.

5.b.iii En déduire la forme générale de la matrice d'un endomorphisme de $\mathcal{C}(f)$ dans la base (e_1'', e_2'', e_3'').

5.c Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(f)$?